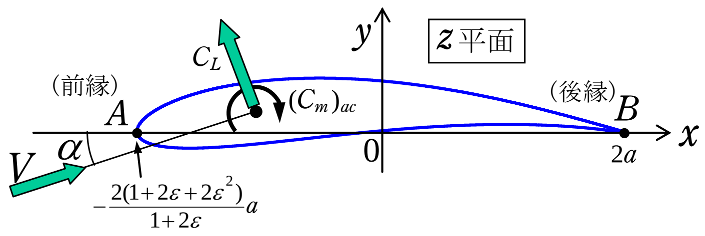
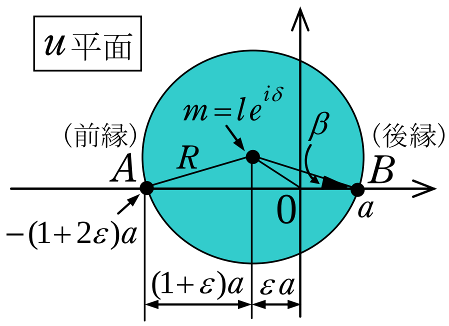
ジュコフスキー翼の２次元ポテンシャル流

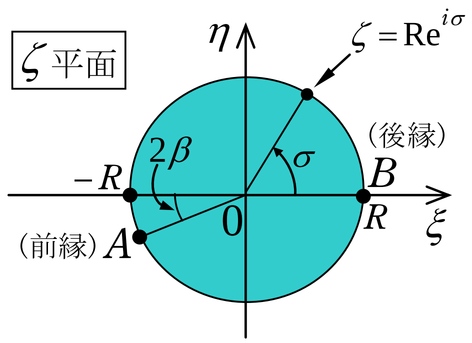
H29(2017).2.3 片柳亮二

１．ジュコフスキー翼

z平面上のジュコフスキー翼を，u平面およびζ平面上の円に写像することにより，２次元ポテンシャル流を求める．（詳細は参考資料[1]参照）







u平面は点mを中心とする円で，写像関数は次式である．

$$z=u+\frac{a^2}{u} \tag{1}$$

次に，u平面の円をζ平面の原点を中心とする半径Rの円に次式によって写像する．

$$\zeta=(u-m)e^{i\beta}, \qquad \therefore\ u=e^{-i\beta}\zeta+m \tag{2}$$

このとき，次のような対応となる．

$$\begin{cases} \text{点 } B\ :\ \zeta=R, & u=\mathrm{Re}^{-i\beta}+m=a \\ \text{点 } A\ :\ \zeta=\mathrm{Re}^{i(\pi+2\beta)}, & u=\mathrm{Re}^{i(\pi+2\beta)}\cdot e^{-i\beta}+m=\mathrm{Re}^{i(\pi+\beta)}+m \\ & \quad =-(1+2\varepsilon)a \end{cases} \tag{3}$$

これから，

$$\therefore\ R=\frac{(1+\varepsilon)a}{\cos\beta} \tag{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{R}e^{-i\beta}+m=\frac{e^{-i\beta}(1+\varepsilon)a}{\cos\beta}+m=a \tag{5}$$

$$\therefore\ m=-\varepsilon a+i(1+\varepsilon)a\tan\beta \tag{6}$$

$$\therefore\ u=e^{-i\beta}\zeta+m\ \ =e^{-i\beta}\zeta-\varepsilon a+i(1+\varepsilon)a\tan\beta \tag{7}$$

よって，次式が得られる．

$$z=u+\frac{a^2}{u}\ \ =e^{-i\beta}\zeta-\varepsilon a+i(1+\varepsilon)a\tan\beta+\frac{a^2}{e^{-i\beta}\zeta-\varepsilon a+i(1+\varepsilon)a\tan\beta} \tag{8}$$

z平面のジュコフスキー翼は，(8)式において$\zeta=\mathrm{R}e^{i\sigma}$とおいて求められる．

ζ平面の半径Rの円のまわりの流れの複素速度ポテンシャルは，次のように与えられる．

$$w=V_\zeta e^{-i\alpha_\zeta}\ \zeta+V_\zeta e^{i\alpha_\zeta}\ \frac{R^2}{\zeta}+\frac{i\Gamma}{2\pi}\log\zeta \tag{9}$$

なお，無限遠における速度の関係から次式が得られる．

$$V=V_\zeta,\qquad \alpha=\alpha_\zeta-\beta \tag{10}$$

後縁B($\zeta=R$)においては，クッタ・ジュコフスキーの条件を適用すると，$dw/d\zeta=0$より循環が次のように求まる．

$$\Gamma=4\pi RV\sin(\alpha+\beta) \tag{11}$$

このとき，(9)式は次のようになる．

$$\begin{aligned}w&=Ve^{-i(\alpha+\beta)}\ \zeta+Ve^{i(\alpha+\beta)}\ \frac{R^2}{\zeta}+\frac{i\Gamma}{2\pi}\log\zeta\\ \therefore\ \ &=V\left\{e^{-i(\alpha+\beta)}\ \zeta+\frac{e^{i(\alpha+\beta)}(1+\varepsilon)^2a^2}{\zeta\cos^2\beta}+\frac{i2(1+\varepsilon)a\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\log\zeta\right\}\\ &=\phi+i\psi\end{aligned} \tag{12}$$

この式から流線が求められる．

(8)式と(12)式より，次式が得られる．

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz}=Ve^{-i\alpha}\ \frac{1-\dfrac{e^{i2(\alpha+\beta)}(1+\varepsilon)^2a^2}{\zeta^2\cos^2\beta}+\dfrac{i2e^{i(\alpha+\beta)}(1+\varepsilon)a\sin(\alpha+\beta)}{\zeta\cos\beta}}{1-\dfrac{a^2}{\{e^{-i\beta}\zeta-\varepsilon a+i(1+\varepsilon)a\tan\beta\}^2}} \tag{13}$$

この式から，z平面上の速度が求められる．

翼に働く力はブラジウスの第1公式を用いて次のようになる．

$$\begin{aligned} F_x - iF_y &= i\frac{\rho}{2}\oint_c \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta \\ &= i\frac{\rho}{2}\left[i2\pi \left(i\frac{V_\zeta \Gamma e^{-i(\alpha_\zeta - \beta)}}{\pi} \right) \right] = -\rho V_\zeta \Gamma \{\sin(\alpha_\zeta - \beta) + i\cos(\alpha_\zeta - \beta)\} \end{aligned} \tag{14}$$

この式と(10)式から，次式を得る．

$$\begin{cases} F_x = -\rho V_\zeta \Gamma \sin(\alpha_\zeta - \beta) = -\rho V \Gamma \sin\alpha \\ F_y = \rho V_\zeta \Gamma \cos(\alpha_\zeta - \beta) \ = \ \rho V \Gamma \cos\alpha \end{cases} \tag{15}$$

$$\therefore L = F_y \cos\alpha - F_x \sin\alpha = \rho V \Gamma (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \rho V \Gamma \tag{16}$$

$$D = F_x \cos\alpha + F_y \sin\alpha = \rho V \Gamma (-\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha) = 0 \tag{17}$$

ここで，(11)式の循環Γを代入すると，次のようになる．

$$L = \rho V \Gamma = 4\pi R \rho V^2 \sin(\alpha + \beta) \ = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L, \quad (S = \bar{c} \times 1) \tag{18}$$

$$\therefore C_L = \frac{8\pi R}{\bar{c}} \sin(\alpha + \beta) \tag{19}$$

次に，モーメントをブラジウスの第2公式により，原点まわりの頭上げモーメントは

$$\begin{aligned} (M)_{\text{原点}} &= \frac{\rho}{2}\mathrm{Real}\left[\oint \left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 \frac{d\zeta}{dz} z\, d\zeta \right] \\ &= \frac{\rho}{2}\mathrm{Real}\left[i2\pi \left(2V_\zeta{}^2 a^2 e^{-i2(\alpha_\zeta - \beta)} - 2V_\zeta{}^2 R^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + ile^{i\delta}\frac{V_\zeta \Gamma e^{-i(\alpha_\zeta - \beta)}}{\pi} \right) \right] \\ &= 2\pi\rho V^2 a^2 \sin 2\alpha - \rho V \Gamma\, l \cos(\alpha - \delta) \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，(16)式の$\rho V \Gamma$の関係式を代入すると，次のようになる．

$$(M)_{\text{原点}} = 2\pi\rho V^2 a^2 \sin 2\alpha - \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L\, l\cos(\alpha - \delta) \ = \frac{1}{2}\rho V^2 S\bar{c} C_m, \quad (S = \bar{c} \times 1) \tag{21}$$

$$\therefore (C_m)_{\text{原点}} = \frac{4\pi a^2}{\bar{c}^2}\sin 2\alpha - C_L \frac{l}{\bar{c}}\cos(\alpha - \delta), \quad (|\delta| \geqq 90^\circ \text{に注意}) \tag{22}$$

翼弦長は次式で与えられる．

$$\bar{c} = 2a + \frac{2(1+2\varepsilon+2\varepsilon^2)}{1+2\varepsilon}a = \frac{4(1+\varepsilon)^2}{1+2\varepsilon}a \tag{23}$$

(4)式の R および(23)式の $\bar{c}$ を(19)式の揚力係数に代入すると

$$C_L = 2\pi \cdot \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} \tag{24}$$

$\varepsilon \neq 0$ の場合は，翼中心の頭上げモーメントは次式で与えられる．

$$(C_m)_{原点} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^4}\sin 2\alpha - C_L \frac{(1+2\varepsilon)}{4(1+\varepsilon)^2} \cdot \frac{-\varepsilon}{\cos\delta} \cdot \cos(\alpha-\delta)$$

（ただし，$|\delta| \geqq 90°$ に注意）　(25)

$\varepsilon = 0$ の場合は，$\delta = 90°$ であるので次のようになる．

$$(C_m)_{原点} = \frac{\pi}{4}\sin 2\alpha - C_L \frac{\tan\beta}{4}\sin\alpha \tag{26}$$

$\beta = 0$ の場合は，$\delta = 180°$ であるので次のようになる．

$$(C_m)_{原点} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^4}\sin 2\alpha + C_L \frac{(1+2\varepsilon)\varepsilon}{4(1+\varepsilon)^2}\cos\alpha \tag{27}$$

次に計算例を示す．

２．計算例

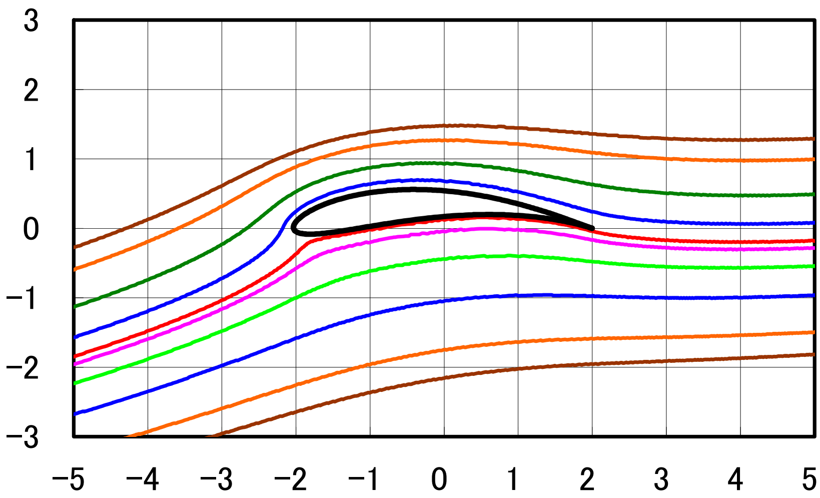
（１）厚さのあるキャンバー翼

KMAP104 以降で，“0”，“4”，“1”とキーインして，
「1: ジュコフスキー翼の流れ」にて下記をキーインした結果を以下に示す．

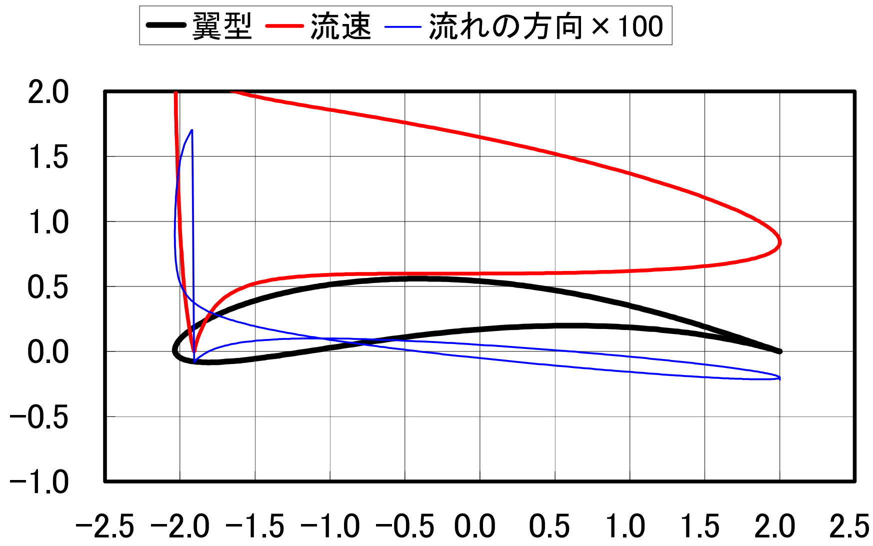
```
厚さε入力=
0.1
キャンバβ(deg)入力=
10
迎角α(deg)入力=
10
循環を入れる＝1, 循環を入れない＝2, キーイン
1
       厚さε  =     1.000000E-01
   キャンバβ  =        10.000000 (deg)
           δ  =       117.274284 (deg)

       迎角α  =        10.000000 (deg)
  零揚力角α0=        -10.000000 (deg)
          CL  =         2.380503
(参考)2πsinα=         1.091064
CL/(2πsinα) =         2.181818
       Cm原点  =     3.024458E-01
        Cmac  =    -2.642003E-01
      空力中心  =        26.074087 (%MAC)
         Yac  =     3.849599E-02
```

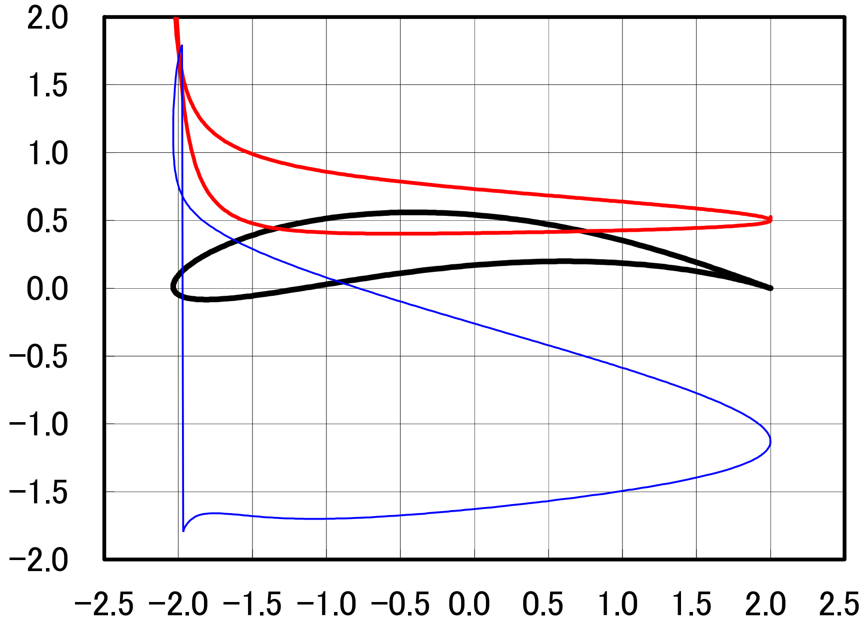
ここで，「1：表示用 Excel 図」を選択すると，Excel 図のメニューが表示されるので，その中の「KMAP 翼理論,翼型と流線.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



次に，Excel 図のメニューの中の「KMAP 翼理論,翼型と翼上流速.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される.



（下図は一様流を除いた流れ）



なお，Excel の図を Word に貼り付ける際には，「形式を選択して貼り付け」の中の“拡張メタファイル”にて実施すると，図が鮮明に貼り付けることができる(参考).

（２）厚さのないキャンバー翼

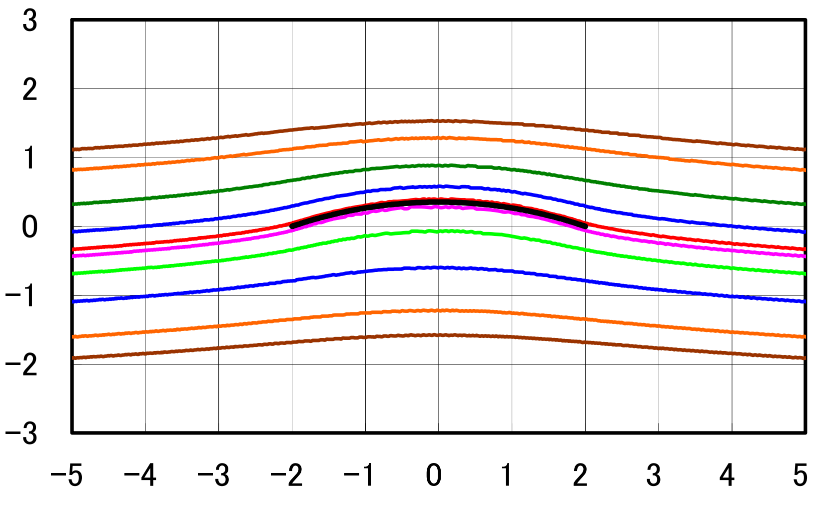
KMAP104 以降で，“0”，“4”，“1”とキーインして，

「1: ジュコフスキー翼の流れ」にて下記をキーインした結果を以下に示す．

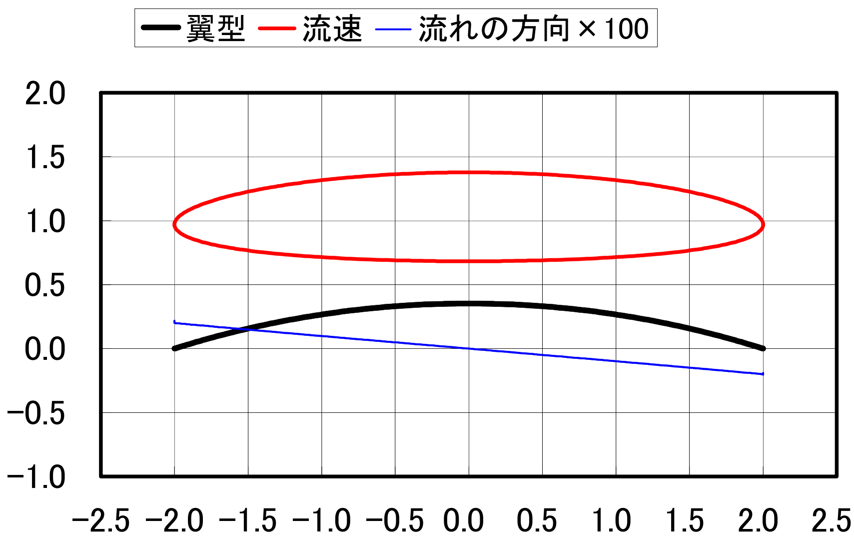
```
厚さε入力=
0
キャンバβ(deg)入力=
10
迎角α(deg)入力=
0
循環を入れる＝1, 循環を入れない＝2, キーイン
1
          厚さε  =     0.000000E+00
       キャンバβ  =        10.000000 (deg)
               δ  =        89.999992 (deg)

          迎角α  =     0.000000E+00 (deg)
       零揚力角α0=       -10.000000 (deg)
              CL  =         1.107895
(参考)2πsinα=     0.000000E+00
          Cm原点  =     0.000000E+00
            Cmac  =    -2.686220E-01
        空力中心  =        25.753843 (%MAC)
             Yac  =     5.316909E-03
```

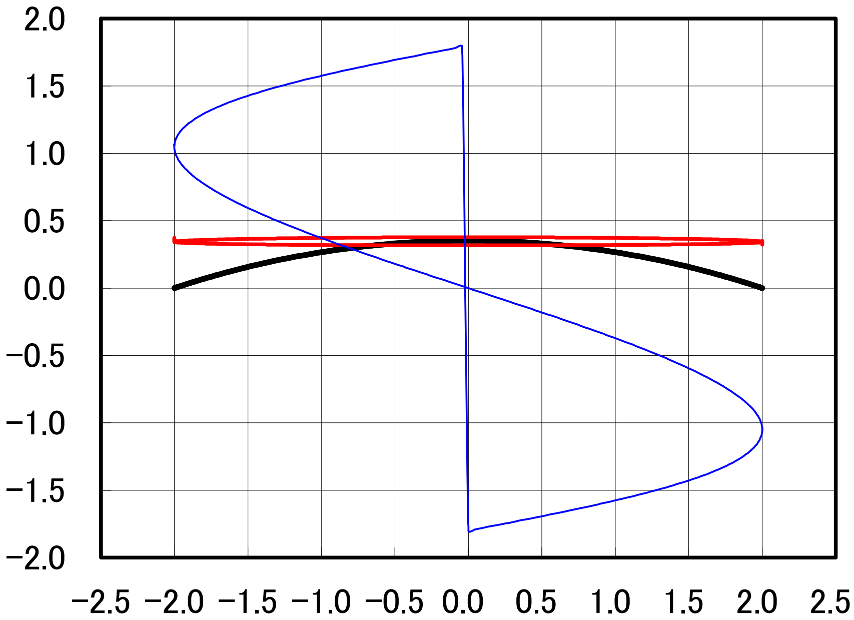
ここで，「1：表示用 Excel 図」を選択すると，Excel 図のメニューが表示されるので，その中の「KMAP 翼理論,翼型と流線.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



次に，Excel 図のメニューの中の「KMAP 翼理論,翼型と翼上流速.xls」を起動してデータ更新すると，下記の図が表示される．



（下図は一様流を除いた流れ）



参考資料[1] 片柳亮二：飛行機の翼理論，成山堂書店，2016